МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

# 

# Лабораторная работа 2

Выполнил:

Арсений Анищенко

3 курс 3 группа

Преподаватель:

Исаченко Александр Николаевич

## 22

Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:

### A)

f1(x) → max, f2(x) → max, где

f1(x) = ax + b(a − x),

f2(x) = x­q(1−x)β , при условии 0 ≤ x ≤ 1.

Здесь a, b, q, β – положительные константы;

### Решение

Рассмотрим при различных значениях a и b для f1(x).

Если a < b, то функция возрастает, иначе - убывает.

Максимум f2(x) достигается при q / (q + b)

Тогда множество Парето будет выглядеть следующим образом :

a < b : Q = [0, q / (q + b)]

a = b : Q = {q / (q + b)}

a > b : Q = [q / (q + b), 1]

### B)

f1(x1, x2) → max, f2(x1, x2) → max, где

f1(x1, x2) = x1 + x2,

f2(x1, x2) = x12 – x22 , при условии 0 ≤ xi ≤ 1, i = 1, 2;

### Решение

f1(x) всюду возрастает по x1 и x2,

f2(x) – возрастает по x1 и убывает по x2.

С ростом х1 обе функции возрастают. При фиксированном x2 обе функции достигают максимума в x1 = 1

Множество Парето : {1}×[0, 1]

### C)

fi(x1, x2, x3) → max, i = 1, 3, где

f1(x1, x2, x3) = min{x2, x3},

f2(x1, x2, x3) = min{x1, x3},

f3(x1, x2, x3) = min{x1, x2}, при условии

x1 + x2 + x3 = 1, xi ≥ 0, i = 1, 2, 3

### Решение

x3 = 1−x1−x2.

Множество Парето:

{(x1, x2, x3) | x1 = x2 , x2 ≥ 1 / 3 } ∪

{(x1, x2, x3) | x1 = x3, x3 ≥ 1/ 3 }∪

{(x1, x2, x3) | x2 = x3, x3 ≥ 1 / 3 }

## 1

Показать, что матричная игра с матрицей *H=(hij)n\*m*  имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решения, если:

### A)

*hij = f*(*i*) *- g*(*j*)

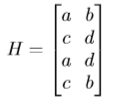
### Решение

I = maxi minj (f(i) − g(j)) = maxi(f(i) – maxj g(j)) = maxi(f(i))− maxj(g(j))

I = minjmaxi (f(i) − g(j)) = minj(maxi f(i) – g(j)) = maxi (f(i))− maxj(g(j))

I = I

### C)



*a*, *b*, *c*, *d –* произвольные числа

### Решение

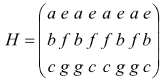
I = max(min(a, c, a, c), min(b, d, b, d)) = max(min(a, c), min(b, d))

I = min(max(a, b), max(c, d), max(a, d), max(c, b))

Числа a, b, c, d попарно сравниваются. По столбцам каждое из чисел сравнивается 1 раз, и 2 раза по строке с двумя другими.

Поэтому I = I и решение в чистых стратегиях определяется однозначно.

### D)



*a*, *b*, *c*, *e*, *f*, *g –* произвольные числа

### Решение

I = max(min(a, b, c), min(e, f, g), min(a, b, g), min(e, f, c), min(a, f, c), min(e, b, g), min(a, f, g), min(e, b, c))

I = min(max(a, e, a, e, a, e, a, e), max(b, f, b, f, b, f, b, f), max(c, g, g, c, c, g, g, c)) = min(max(a, e), max(b, f), max(c, g))

Числа a, b, c, e, f, g попарно сравниваются. По столбцам каждое из чисел сравнивается 4 раза с 4 другими, пятое сравнение в строке с последним из оставшихся. Поэтому I = I и решение в чистых стратегиях определяется однозначно.

### E)



*ai* , *bj –* произвольные числа, *ci* , *dj –* положительные числа.

### Решение

Если ai/ci max для элементов из a и с, строка i будет всех остальных строк. Если bj/dj min для элементов b и d, этот столбец будет доминировать над всеми остальными. Пересечение доминирующих столбцов - седловая точка. Если мы найдем максимальное число в таблице, то строка в которой она будет находится будет характеризовать доминирующую стратегию первого игрока, а минимальный элемент матрицы будет характеризовать доминирующую стратегию второго игрока.

### F)

*n = m* и для любых *i*, *j*, *k*, 1 *≤ i*, *j*, *k ≤ m*, имеет место тождество *hij+hjk + hki=* 0

### Решение

I = maxi minj (*hij*) = maxi minj (*- hjk - hki*) = − maxj *hjk*− minj*hki*

I = minjmaxi (*hij*) = minjmaxi (*- hjk - hki*) = − maxj *hjk*− minj*hki*

I = I

## 5

Каждый из игроков имеет три фишки, которые может располагать

в трёх позициях (в одной позиции можно расположить одну, две или три

фишки). Фишка второго игрока “уничтожает” фишку противника,

расположенную в той же позиции. Расстановка фишек производится в

отсутствии информации о решении противника. Неуничтоженная фишка

первого игрока “ прорывается” через соответствующую позицию.

Составить и решить матрицную игру, считая выигрышем первого игрока

(соответственно проигрышем второго игрока) общее число

“прорвавшихся” фишек.

## Решение

Стратегии

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** |
| **1** | 3 |  |  |
| **2** |  | 3 |  |
| **3** |  |  | 3 |
| **4** | 2 | 1 |  |
| **5** | 2 |  | 1 |
| **6** | 1 | 2 |  |
| **7** |  | 2 | 1 |
| **8** | 1 |  | 2 |
| **9** |  | 1 | 2 |
| **10** | 1 | 1 | 1 |

Матрица выигрышей

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **H** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **1** | 0 | 3 | 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 |
| **2** | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 |
| **3** | 3 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| **4** | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| **5** | 1 | 3 | 2 | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| **6** | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| **7** | 3 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| **8** | 2 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 0 | 1 | 1 |
| **9** | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| **10** | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

I = mini(maxj(hij)) = 0

I = maxi(minj(hij)) = 2

I I

Двойственная задача

xi 0, i = [1, 10]

x1 + 4x2 + 4x3 + 2x4 + 2x5 + 3x6 + 4x7 + 3x8 + 4x9 + 3x10 1

4x1 + x2 + 4x3 + 3x4 + 4x5 + 2x6 + 2x7 + 4x8 + 3x9 + 3x10 1

4x1 + 4x2 + x3 + 4x4 + 3x5 + 4x6 + 3x7 + 2x8 + 2x9 + 3x10 1

2x1 + 3x2 + 4x3 + x4 +2x5 + 2x6 + 3x7 + 3x8 + 3x9 + 2x10  1

2x1 + 4x2 + 3x3 + 2x4 + x5 + 3x6 + 3x7 + 2x8 + 3x9 + 2x10 1

3x1 + 2x2 + 4x3 + 2x4 + 3x5 + x6 + 2x7 + 3x8 + 3x9 + 2x10 1

4x1 + 2x2 + 3x3 + 3x4 + 3x5 + 2x6 + x7 + 3x8 + 2x9 + 2x10 1

3x1 + 4x2 + 2x3 + 3x4 + 2x5 + 3x6 + 3x7 + x8 + 2x9 + 2x10 1

4x1 + 3x2 + 2x3 + 3x4 + 3x5 + 3x6 + 2x7 + 2x8 + x9 + 2x10 1

3x1 + 3x2 + 3x3 + 2x4 + 2x5 + 2x6 + 2x7 + 2x8 + 2x9 + x10  1

x1 =x2 = x3 = 1/9, xi = 0, i = [4, 10]

Двойственная задача

yi 0, i = [1, 10]

y1 + 4y2 + 4y3 + 2y4 + 2y5 + 3y6 + 4y7 + 3y8 + 4y9 + 3y10 1

4y1 + y2 + 4y3 + 4y4 + 3y5 + 4y6 + 2y7 + 2y8 + 3y9 + 3y10 1

4y1 + 4y2 + y3 + 4y4 + 3y5 + 4y6 + 3y7 + 2y8 + 2y9 + 3y10 1

2y1 + 3y2 + 4y3 + y4 + 2y5 + 2y6 + 3y7 + 3y8 + 3y9 + 2y10 1

2y1 + 4y2 + 3y3 + 2y4 + y5 + 3y6 + 3y7 + 2y8 + 3y9 + 2y10 1

3y1 + 2y2 + 4y3 + 2y4 + 3y5 + y6 + 2y7 + 3y8 + 3y9 + 2y10 1

4y1 + 2y2 + 3y3 + 3y4 + 3y5 + 2y6 + y7 + 3y8 + 2y9 + 2y10 1

3y1 + 4y2 + 2y3 + 3y4 + 2y5 + 3y6 + 3y7 + y8 + 2y9 + 2y10 1

4y1 + 3y2 + 2y3 + 3y4 + 3y5 + 3y6 + 2y7 + 2y8 + y9 + 2y10 1

3y1 + 3y2 + 3y3 + 2y4 + 2y5 + 2y6 + 2y7 + 2y8 + 2y9 + y10 1

y1 = y2 = y3 = 1/9, yi = 0, i = [4, 10]

Значение игры

I = 1 / (x1 + … + x10) – 1 = 1 /(1/9 + 1/9 +1/9) – 1 = 2

Оптимальные смешанные стратегии:

pi = 1/9 \* (1 / (x1 + … + x10) ) = 3/9 = 1/3, i = [1, 3]

pi = 0 \* (1 / (x1 + … + x10) ) = 0, i = [4, 10]

qi = 1/3, i = [1, 3]

qi = 0 , i = [4, 10]

## 6

Два игрока одновременно и независимо друг от друга показывают от одного до пяти пальцев. Если общее число указанных пальцев чётно, то сумму равную этому числу выигрывает первый игрок, если нечётно, то второй игрок. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

## Решение

Матрица выигрышей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | -3 | 4 | -5 | 6 |
| -3 | 4 | -5 | 6 | 7 |
| 4 | -5 | 6 | -7 | 8 |
| -5 | 6 | -7 | 8 | -9 |
| 6 | -7 | 8 | -9 | 10 |

I = mini(maxj(hij)) = −5

I = maxi(minj(hij)) = 6

I I

Двойственная задача

xi 0, i = [1, 5]

12x1 + 7x2 + 14x3 + 5x4 + 16x5 ≥ 1

7x1 + 14x2 + 5x3 + 16x4 + 3x5 ≥ 1

14x1 + 5x2 + 16x3 + 3x4 + 18x5 ≥ 1

5x1 + 16x2 + 3x3 + 18x4 + x5 ≥ 1

16x1 + 3x2 + 18x3 + x4 + 20x5 ≥ 1

x1 = 1/80

x2 = x3 = 0

x4 = 1/20

x5 = 3/80

Двойственная задача

yi 0, i = [1, 5]

12y1 + 7y2 + 14y3 + 5y4 + 16y5 ≤ 1

7y1 + 14y2 + 5y3 + 16y4 + 3y5 ≤ 1

14y1 + 5y2 + 16y3 + 3y4 + 18y5 ≤ 1

5y1 + 16y2 + 3y3 + 18y4 + y5 ≤ 1

16y1 + 3y2 + 18y3 + y4 + 20y5 ≤ 1

y1 = 1/80

y2 = y3 = 0

y4 = 1/20

y5 = 3/80

Значение игры

Оптимальные смешанные стратегии

p1 = ⅛

p2 = p3 = 0

p4 = ½

p5 = ⅜

q1 = ⅛

q2 = q3 = 0

q4 = ½

q5 = 3

## 7

Каждый игрок имеет по три фишки с номерами 1, 2, 3. Игроки независимо друг от друга кладут от одной до трёх фишек на стол цифрами вниз. Затем фишки переворачиваются. Выигрывает первый игрок, если сумма цифр всех фишек делится на три. Второй игрок выигрывает, если сумма делится на четыре. Определить чистые стратегии игроков. Найти смешанные стратегии и значение игры.

## Решение

Стратегии

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Построим матрицу H по такому принципу:

Делится на три - первый игрок получает выигрыш +1, если на четыре –второй получает выигрыш +1 (т.е. первый получает –1). В противном случае каждому по 0.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | -1 | 0 | -1 | 0 | -1 |
| -1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 1 |
| 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | -1 |

1) В чистых стратегиях.

Считаем, что первый игрок выбирает свою стратегию так, чтобы получить максимальный свой выигрыш, а второй игрок так, чтобы минимизировать выигрыш первого игрока.

a = -1, b = 1 => не разрешима в чистых стратегиях.

2 ) В смешанных стратегиях.

В матрице присутствуют отрицательные элементы. Для упрощения расчетов добавим к элементам матрицы 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 |

Двойственная задача

x1+2x2+x4+2x5+x6 ≥ 1

2x1+x3+x5 ≥ 1

x2+2x3+x4+2x6 ≥ 1

x1+x3+2x5+x6 ≥ 1

2x1+x2+2x4+x5+x6 ≥ 1

x1+2x3+x4+x5 ≥ 1

x1 = 2/7, x2 = 1/7, x3 = 2/7, x4 = 0, x5 = 1/7, x6 = 1/7

Двойственная задача

y1+2y2+y4+2y5+y6 ≤ 1

2y1+y3+y5 ≤ 1

y2+2y3+y4+2y6 ≤ 1

y1+y3+2y5+y6 ≤ 1

2y1+y2+2y4+y5+y6 ≤ 1

y1+2y3+y4+y5 ≤ 1

y1 = 1/4 , y2 = 0, y3 = 1/4, y4 = 0, y5 = 1/4, y6 = ¼

Значение игры

I = 1

Оптимальные смешанные стратегии

p1 = 1 • 1/4 = 1/4

p2 = 1 • 0 = 0

p3 = 1 • 1/4 = 1/4

p4 = 1 • 0 = 0

p5 = 1 • 1/4 = 1/4

p6 = 1 • 1/4 = 1/4

q1 = 1 • 2/7 = 2/7

q2 = 1 • 1/7 = 1/7

q3 = 1 • 2/7 = 2/7

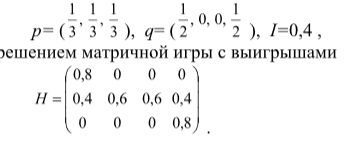
q4 = 1 • 0 = 0

q5 = 1 • 1/7 = 1/7

q6 = 1 • 1/7 = 1/7

## 8

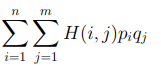
Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры



## Решение

I = I = ⅘\*⅓\*½ + ⅖\*⅓\*½ + ⅗\*⅓\*0 + ⅗\*⅓\*0 + ⅖\*⅓\*½ + ⅘\*⅓\*½ = ⅖

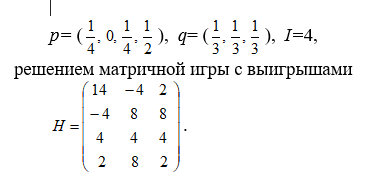
Значение игры



Стратегии и значение игры являются решением.

## 9

Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры

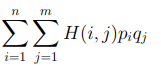


## Решение

I = I = 14 \* ¼\*⅓ - 4\*¼\*⅓ + 2\*¼\*⅓ - 4\*0\*⅓ + 8\*0\*⅓ + 8\*0\*⅓ + 4\*¼\*⅓ +

4\*¼\*⅓ + 4\*¼\*⅓ + 2\*½\*⅓ + 8\*½\*⅓ + 2\*½\*⅓ = 4

Значение игры



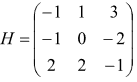
Стратегии и значение игры являются решением.

## 10

Найти графоаналитическим методом решение матричной игры с

матрицей H = (hij )n×m

### A)



### Решение

α = -1, β = 2

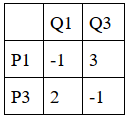
Они различны, чистых стратегий нет. Исключаем доминирующие стратегии.

Стратегии первого игрока ai i = [1, 3], второго – bj , j = [1, 3]

([-1, 1, 3] ≥ [−1, 0, 2]), значит, стратегия а1 доминирует над стратегией а2, значит, p2 = 0

([−1, -1, 2] ≤ [1, 0, 2]), значит, стратегия b1 доминирует над стратегией b2, значит, q2 = 0

Матрица H



Решение игры в смешанных стратегиях.

I = -1\*q1 + 3\*q3

I = 2\*q1 – q3

q1 + q3 = 1

q1 = 4/7, q3 = 3/7 I = 5/7

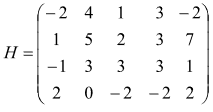
-p1 + 2\*p3 = I

3\*p1 – p3 = I

p1+p3 = 1 , p1 = 3/7, p3 = 4/7

I = 5/7 p = (3/7, 0, 4/7) q = (4/7, 0, 3/7)

### B)



### Решение

α1 = −2, α2 = 1, α3 = −1, α4 = −2

β1 = 2, β2 = 5, β3 = 3, β4 = 3, β5 = 7

α = 1, β = 2

Они различны, чистых стратегий нет.

Исключаем доминирующие стратегии.

Стратегии первого игрока ai i = [1, 4], второго – bj , j = [1, 5]

([1, 5, 2, 3, 7] ≥ [−2, 4, 1, 3, −2]), значит, стратегия а2 доминирует над стратегией а1, значит, p1 = 0

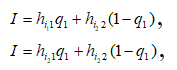
([−2, 1, −1, 2] ≤ [−2, 7, 1, 2]), значит, стратегия b1 доминирует над стратегией b5, значит, q5 = 0

([1, 2, 3, −2] ≤ [4, 5, 3, 0]), значит, стратегия b3 доминирует над стратегией b2, значит, q2 = 0

([1, 2, 3, −2] ≤ [3, 3, 3, −2]), значит, стратегия b3 доминирует над стратегией b4, значит, q4 = 0

Матрица H

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Q1 | Q3 |
| P2 | 1 | 2 |
| P3 | -1 | 3 |
| P4 | 2 | -2 |



I = 1\*q1 + 2(1 – q1) = 2q1 – 2(1 – q1)

q1 – 2q1 – 2q1 – 2q1 = -4

q1 = 4/5, q3 = ⅕

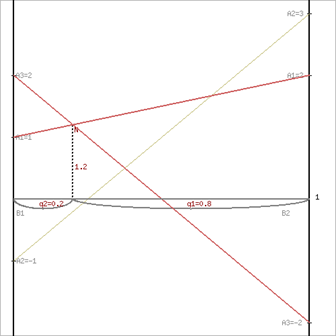
I = 6/5

p2+2p4 = 6/5

2p2-2p4 = 6/5

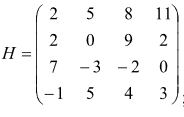
p2+p4 = 1

p2 = 4/5, p4 = ⅕



I = 6 /5 p = (0, 4/5 , 0, 1/5 ) q = (4/5 , 0, 1/ 5 , 0, 0)

### C)



### Решение

α = 2, β = 5

Исключаем доминирующие стратегии.

Стратегии первого игрока ai i = [1, 4] , второго – bj , j = [1, 5]

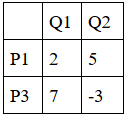
Стратегия а1 доминирует над стратегией а4, значит, p4 = 0

Стратегия а1 доминирует над стратегией а2, значит, p2 = 0

Стратегия b2 доминирует над стратегией b3, значит, q3 = 0

Стратегия b2 доминирует над стратегией b4, значит, q4 = 0

Матрица H



I = 2\*q1 + 5\*q2

I = 7\*q1 – 3\*q2

q1 + q2 = 1

q1 = 8/13, q2 = 5/13, I = 2\*8/13 + 5\*5/13 = 41/13

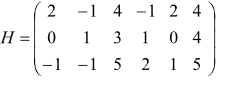
2\*p1+ 7\*p3 = I

5\*p1– 3\*p3 = I

p1+p3 = 1 , p1 = 10/13, p3 = 3/13

I = 6 /5 p = (10/13, 0, 3/13, 0 ) q = (8/13, 5/13, 0, 0)

### D)



### Решение

α = 0, β = 1

Стратегии первого игрока ai i = [1, 4], второго – bj , j = [1, 5]

Стратегия а1 доминирует над стратегией а3, значит, p3 = 0

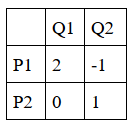
Стратегия b1 доминирует над стратегией b3, значит, q3 = 0

Стратегия b1 доминирует над стратегией b4, значит, q4 = 0

Стратегия b1 доминирует над стратегией b5, значит, q5 = 0

Стратегия b1 доминирует над стратегией b6, значит, q6 = 0

Матрица H



I = 2\*q1 - 1\*q2

I = 0\*q1 + 1\*q2

q1 + q2 = 1

q1 = 1/2, q2 = 1/2, I = 1/2

2\*p1+ 0\*p2 = I = 1/2

-1\*p1– 1\*p2 = I

p1+p2 = 1 , отсюда p1 = 1/4, p2 = ¾

I = 6 /5 p = (1/4, 3/4, 0) q = (1/2, 1/2, 0, 0, 0, 0)

## 11

### A)

Показать, что если hi-1,j − 2hij + hi+1,j 0, i = 2, n − 1, i = 1, m, то в игре с матрицей H = (hij )n×m каждый игрок имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более двух чистых стратегий.

### Решение

(hi-1,j − hij ) + (hi+1,j − hij ) 0

|  |  |
| --- | --- |
| (hi+1,j − hij ) 0 (i строка доминирует i+1)  pi-1 = 0, i = [2, n - 1], j = [1, m] | (hi-1,j − hij ) 0 (i строка доминирует i-1)  pi-1 = 0, i = [2, n - 1], j = [1, m] |

Матрицы выигрышей размера 2\*2. Можно найти оптимальные стратегии игроков.У каждого игрока для оптимальной стратегии не более двух чистых стратегий, так как матрица 2\*2.

### B)

Показать, что если hi−1,j − 2hij + hi+1,j ≥ 0, i = [2, n - 1], i = [1, m], то в игре с матрицей H = (hij )n×m первый игрок имеет оптимальную стратегию p, для которой pi = 0, i = [2, n - 1].

### Решение

(hi−1,j − hij ) + (hi+1,j − hij ) ≥ 0

|  |  |
| --- | --- |
| (hi+1,j − hij ) ≥ 0 (i+1 строка доминирует i)  pi = 0, i = [2, n - 1], j = [1, m] | (hi-1,j − hij ) 0 (i-1 строка доминирует i)  pi = 0, i = [2, n - 1], j = [1, m] |

Матрицы выигрышей размера 2\*2. Можно найти оптимальные стратегии игроков.У каждого игрока для оптимальной стратегии не более двух чистых стратегий, так как матрица 2\*2.